

Círculos matemáticos
Totonicapán
Guatemala, mayo de 2016

PROBLEMA DE LOS CASILLEROS

El problema que motiva esta actividad es el problema de los casillero. Hay muchas formas de abordar este problema y en cada una de ellas se desarrollan diversos conceptos matemáticos.

Instrucciones de la actividad

Se comienza con 15 vasos, todos boca abajo sobre una mesa, como se muestra en la figura.



En la misma habitación hay 15 personas numeradas del 1 al 15. Una forma de de las instrucciones es: La persona con el número 2 le debe dar vuelta a los vasos de dos en dos, empezando por el segundo vaso, es decir, el le debe dar vuelta a los vasos con los números 2,4,6,8,10,12,14. La persona con el número 3 debe voltear los vasos de tres en tres, comenzado con el tercer vaso, es decir, le dará vuelta a los vasos con los números 3,6^a,9,12,15. Así en general la persona con el número n volteará los vasos de n en n .

Otra forma de dar las instrucciones es: La persona con el número 2 volteará los vasos que sean múltiplos de 2. La persona con el 3, volteará los vasos que sean múltiplos de 3. La persona con el número n volteará los vasos que son múltiplos de n .

^oEl vaso 6 ya estaría boca arriba porque la persona con el número 2 lo dejó en esa posición, así que la persona con el número 3 lo volverá a poner boca abajo.

Pregunta 1

Si se comienza con los vasos boca abajo como se muestra en la figura y hacemos que la persona con el número 1, la del número 2, hasta la del número 15, volteen los vasos según lo explicado anteriormente ¿Qué vasos terminarán boca arriba y cuáles boca abajo?

Respuesta: La mejor manera de encontrar esta respuesta es dejar que los participantes completen la actividad y se percaten que los vasos que terminarán boca arriba serán los numerados con el 1,4 y 9. Hay que notar que los números anteriores son todos **cuadrados perfectos**.

Apuntes ²

Pregunta 2

¿Qué vasos va a voltear la persona con el número 7?

Respuesta: Esta pregunta es fácil de responder si el estudiante siguió las instrucciones de manera correcta (volteará los vasos 7 y 14). El facilitador puede preguntar a cada uno de los estudiantes que vasos le toca voltear en su turno.

Pregunta 3

¿Qué vasos va a voltear la persona con el número 1?

Respuesta: Con esta pregunta tenemos una oportunidad de discutir el concepto de los múltiplos de 1. Podemos hacer la conexión entre los múltiplos de 1 y los vasos que va a voltear la persona con el número 1. La respuesta es que la persona número 1 va a voltear todos los vasos, ya que todos los números son múltiplos de 1.

Pregunta 4

¿El vaso 1 se encuentra boca abajo o boca arriba después de que todas las personas han volteado sus vasos? ¿Por qué pasa esto?

Respuesta: El vaso uno está boca arriba después de cada persona voltear sus vasos. Esto pasa porque la única persona que toca el vaso 1 es la persona 1. Las demás personas comienzan sus movimientos con números más grandes y nunca retroceden.

Pregunta 5

¿Cuántas veces han sido volteados los vasos que terminan boca abajo?
¿Cuántas veces han sido volteados los vasos que terminan boca arriba?
¿Podrías decir algo acerca de la paridad de los números de las dos preguntas anteriores?

Respuesta: Las respuestas a estas preguntas son de vital importancia para entender por qué los vasos que terminan boca arriba deben ser cuadrados perfectos. Por ejemplo, el vaso 8 es tocado por la persona 1, quien lo pone boca arriba. Luego la persona 2 lo pone boca abajo, la persona 4 boca arriba y finalmente la persona 8 lo vuelve a poner boca abajo. Así, como el vaso 8 es tocado por una cantidad par de veces, entonces la última persona que lo toca siempre lo pondrá boca abajo. Por otro lado, si el vaso es tocado una cantidad impar de veces, entonces la última persona que lo toca lo pone boca arriba. Esta pregunta es una buena oportunidad para hablar del concepto de números pares e impares. Se puede introducir la idea de residuo. Si hay un residuo, entonces el vaso terminará boca arriba, mientras que si no hay residuo el vaso siempre terminará boca abajo.

Pregunta 6

¿Qué pasa con los vasos que están etiquetados con un número primo?
¿Cuántas veces han sido volteados estos vasos? ¿Por qué?

Respuesta: Esta pregunta es una buena oportunidad para discutir y entender que es un número primo. Un número primo es aquél que tiene exactamente dos factores positivos: 1 y el mismo. Ejemplos de números primos son 2,3,5,7,11,13,17,19. En el contexto del juego de los vasos, tomemos por ejemplo el vaso con el número 7. Si alguna persona toca el vaso 7 esto significa que el número de la persona debe tener como a uno de sus múltiplos al número 7. Esto es lo mismo que decir que el número de esta persona tiene que ser un factor de 7. De lo anterior se sigue que las únicas personas que pueden tocar el vaso son la número 1 y la número 7, ya que los únicos factores positivos de 7 son 1 y el mismo, ya que 7 es primo. Lo mismo sucede con todos los números primos p , sólo hay dos personas que tocan el vaso p , a saber: la persona 1 y la persona p . Como todos los vasos con número primo son tocados 2 veces (que es par) entonces al finalizar el juego estos vasos deben estar boca abajo.

Es importante notar que los vasos que están boca abajo no todos tienen un número primo como etiqueta, por ejemplo el vaso 8 y el 12 son vasos que terminan boca abajo y no son primos. Por lo que se hace necesario seguir investigando para responder la pregunta central.

Pregunta 7

¿Cuál es la relación entre el número de factores de un número y la cantidad de veces que un vaso con ese número es volteado?

Respuesta: Siguiendo la misma lógica que en la respuesta anterior notamos que el número de factores del número n es justamente el mismo número de veces que el vaso n es volteado.

Pregunta 8

¿El número de factores de un número siempre es par? ¿Cuál es la paridad del número de factores de un cuadrado perfecto? ¿Por qué?

Respuesta: Para estas preguntas debemos notar que para un número n si d es uno de sus factores, entonces $\frac{n}{d}$ también es un factor, por lo que la única opción para que un número tenga un número impar de factores es que $d = \frac{n}{d}$, pero en este caso se tiene que $n = d^2$, es decir que para que el número de factores de n sea impar se debe que cumplir que n sea un cuadrado perfecto.

Pregunta 7

Otras preguntas que resultan de interés son:

- ¿Cambia algo si ahora comenzamos con 100 vasos y 100 personas en lugar de 15? En general, si empezamos con N vasos y N personas ¿Cambia en algo la dinámica de la actividad?
- La persona 3 y la 4 se ponen a platicar y si preguntan si ellos tienen que voltear algún vaso en común ¿Que responderías tu? ¿Cómo se relaciona esto con el mínimo común múltiplo?
- ¿Cuál es el primer vaso que la persona M y la N tienen para voltear en común?
- Con 100 vasos y 100 personas ¿Quién es la última persona que en su turno voltea tanto el vaso 40 como el 72?
- ¿Quién es la última persona que voltea en su turno tanto el vaso N como el M ?

Conceptos desarrollados

En conclusión los conceptos matemáticos desarrollados en esta actividad fueron:

- Múltiplos y factores.
- Números pares e impares, residuos de dividir por 2.
- Cuadrados perfectos.
- Números primos.
- Mínimo común múltiplo y máximo común divisor.